

8. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = (1, -6, 3)^T$, $\vec{x}_2 = (-2, 0, 7)^T$

$$A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2, 2, 7) \cdot (1, -6, 3) \\ (3, 9, 1) \cdot (1, -6, 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 2 \cdot (-6) + 7 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 9 \cdot (-6) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 12 + 21 \\ 3 - 54 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -48 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2, 2, 7) \cdot (-2, 0, 7) \\ (3, 9, 1) \cdot (-2, 0, 7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 0 + 49 \\ -6 + 0 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 1 (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = (1, 0)^T$, $\vec{x}_2 = (2, -2)^T$

$$A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1, 0) \cdot (1, 0) \\ (1, 7) \cdot (1, 0) \\ (-3, 2) \cdot (1, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1, 0) \cdot (2, -2) \\ (1, 7) \cdot (2, -2) \\ (-3, 2) \cdot (2, -2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 - 14 \\ -6 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Příklad 1 (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = (1, -3, 1, 2)^T$, $\vec{x}_2 = (1, 0, 9, 3)^T$

$$A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 8 \cdot (-3) + 3 \end{pmatrix} = -19$$

$$A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 0 + 3 \cdot 9 + 0 \end{pmatrix} = 29$$

Příklad 1 (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \vec{x}_1 = (1, 0, 3)^T, \vec{x}_2 = (1, -2, 7)^T$

$$A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1, 0, -1) \cdot (1, 0, 3) \\ (2, -2, 0) \cdot (1, 0, 3) \\ (3, 4, 5) \cdot (1, 0, 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 2 \\ 3 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1, 0, -1) \cdot (1, -2, 7) \\ (2, -2, 0) \cdot (1, -2, 7) \\ (3, 4, 5) \cdot (1, -2, 7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 7 \\ 2 + 4 \\ 3 - 8 + 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Příklad 2(a) $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, L(x, y, z) = (x + z, y - z)$

Uvažme $(x, y, z), (o, p, q) \in \mathbb{R}^3$ a $a \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\begin{aligned} L((x, y, z) + (o, p, q)) &= L(x + o, y + p, z + q) = (x + o + z + q, y + p - z - q) = \\ &= (x + z, y - z) + (o + q, p - q) = L(x, y, z) + L(o, p, q) \end{aligned}$$

$$L(a \cdot (x, y, z)) = L((ax, ay, az)) = (ax + az, ay - az) = a(x + z, y - z) = a \cdot L(x, y, z)$$

Dostáváme, že L je lineární zobrazení. Určeme jeho jádro. Rovnost $L(x, y, z) = (0, 0)$ dává následující soustavu.

$$\begin{array}{rcl} x + z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \\ \hline x & = & -z \\ y & = & z \end{array}$$

Z toho plyne, že $\text{Ker } L = \{(-z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{lin}_{\mathbb{K}}\{(-1, 1, 1)\}$.

Dostáváme, že $\dim \text{Ker } L = 1$. Zároveň víme, že $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Z Vět 10.3 plyne, že $\dim \text{Im } L = 2$. Jelikož dimenze $\mathbb{R}^2$ je též 2, tak z toho plyne, že $\text{Im } L = \mathbb{R}^2$.

Dostáváme, že $\text{Im } L = \text{lin}_{\mathbb{K}}\{(-1, 0), (-1, -1)\} = \mathbb{R}^2$.

Nalezneme matici A , která odpovídá zobrazení L . Jelikož $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tak musí být reprezentováno maticí typu 3×2 . Uvažme matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Platí

$$(x + z, y - z) = L(x, y, z) = A \cdot (x, y, z)^T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (ax + by + cz, dx + ey + fz)$$

Dostáváme, že $a = 1, b = 0, c = 1, d = 0, e = 1, f = -1$, tedy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Příklad 2(b) $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 - 3x_2 + x_4, 7x_1 - 2x_4)$

Podobně jako v 2 (a) zjistíme, že L je lineární zobrazení. Určíme jádro a obraz.

$L(x, y, z, q) = 0$ dává soustavu

$$2x + y + 3z = 0$$

$$x - 3y + q = 0$$

$$7x - 2y = 0$$

Pomocí matice získáme:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 19 & 0 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 19 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že řešením soustavy je: $q = 19a, y = 7a, x = 3y - q = a(21 - 19) = 2a, z = \frac{1}{3}(2q - 7y) = \frac{a}{3}(38 - 49) = \frac{-11a}{3}$ pro $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ker } L = \{(a \cdot (2, 7, -\frac{11}{3}, 19), a \in \mathbb{R}) = \text{lin}_{\mathbb{K}}\{(6, 21, -11, 57)\}$$

Vidíme, že $\dim \text{Ker } L = 1$. Z Věty 10.3 dostáváme, že $\dim \text{Im } V = 3$. Tedy $\text{Im } L = \mathbb{R}^3$. Jiný způsob, jak zjistit $\text{Im } L$ (nebo pokud vyjde menší dimenze, než dimenze, kam zobrazujeme): zobrazit bázi prostoru, ze kterého zobrazujeme.

Báze prostoru $\mathbb{R}^4$ je $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$.

$$L(1, 0, 0, 0) = (2, 1, 7)$$

$$L(0, 1, 0, 0) = (1, -3, 0)$$

$$L(0, 0, 1, 0) = (3, 0, 0)$$

$$L(0, 0, 0, 1) = (0, 1, -2)$$

$$\text{Im } L = \text{lin}_{\mathbb{K}}\{(2, 1, 7), (1, -3, 0), (3, 0, 0), (0, 1, -2)\} = \mathbb{R}^3.$$

Fakt $\text{Im } L = \mathbb{R}^3$ plyne z Věty 10.2.

Příklad 2(c) $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, L(x, y, z) = (x^2 + y, y^2 + z, 0)$

Nejde o lineární zobrazení, neb $L(2 \cdot (x, y, z)) = L(2x, 2y, 2z) = (4x^2 + 2y, 4y^2 + 2z, 0)$, což obecně není rovno výrazu $2L(x, y, z) = 2 \cdot (x^2 + y, y^2 + z, 0) = (2x^2 + 2y, 2y^2 + 2z, 0)$ - např. pro $(x, y, z) = (1, 0, 0)$.

Příklad 2(d) $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, L(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$

Z definice lze snadno ověřit, že jde o lineární zobrazení, jemuž odpovídá matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále zřejmě $\text{Ker } L = \mathbb{R}^3$. Z Věty 10.3 plyne, že $3 = \dim \text{Ker } L + \dim \text{Im } L = 3 + \dim \text{Im } L$, tedy $\dim \text{Im } L = 0$. Z toho plyne, že $\text{Im } L = \{(0, 0, 0)\}$.

Příklad 2(e) $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, L(x, y) = x + y + 3$

Zobrazení není lineární, což dokládá například vektor $(0, 0)$ a skalár 2:

$$L(2 \cdot (0, 0)) = L(0, 0) = 3 \neq 6 = 2 \cdot 3 = 2 \cdot L(0, 0)$$

Příklad 2(f) $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, L(x) = \sin x + \cos x$

Zobrazení není lineární, což dokládá například vektor (0) a skalár 2:

$$L(2 \cdot 0) = L(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1 \neq 2 \cdot 1 = 2 \cdot (\sin 0 + \cos 0) = 2 \cdot L(0)$$

Příklad 2(g) $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, L(x, y, z) = (3x + 2y - z, 2x + y - 3z, 3y - 2z)$

Z definice lze snadno ukázat, že L je lineární zobrazení, jemuž odpovídá matice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Vyšetření jádra: podívejme se pro které vektory platí $L(x, y, z) = 0$. Dostáváme soustavu:

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y - z & = & 0 \\ 2x + y - 3z & = & 0 \\ 3y - 2z & = & 0 \\ \hline z & = & 3x + 2y \\ 2x + y - 9x - 6y & = & 0 \\ 3y - 6x - 4y & = & 0 \\ \hline z & = & 3x + 2y \\ -7x - 5y & = & 0 \\ -6x - y & = & 0 \\ \hline z & = & 3x + 2y \\ y & = & -6x \\ 7x & = & -30x \end{array}$$

Dostáváme, že řešením dané soustavy je pouze $x = y = z = 0$. Tedy $\text{Ker } L = \{(0, 0, 0)\}$. Z Věty 10.3 plyne, že $\dim \text{Im } L = 3$, tedy $\text{Im } L = \mathbb{R}^3$.

K determinantu: pozor na plusy a mínusy - člen $(-1)^{i+1}$ v definici determinantu

Příklad 3 (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Pro determinant matice typu 2×2 funguje jednoduché „křížové pravidlo“ - násobíme úhlopříčku spojující levý horní a pravý dolní roh a odečteme od ní součin prvků zbylé úhlopříčky. Tedy determinant matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je $a \cdot d - b \cdot c$.

V našem případě:

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - (-8) \cdot 3 = -2 + 24 = 22$$

Příklad 3 (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Postupujeme podle definice determinantu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 - 1 \cdot 0) - 0 + 1 - 0 \cdot 1 = 2$$

Alternativně: využijme pravidla pro determinant a úpravy matice - Věta 5.8 z 2. semestru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pak z Věty 5.8 z 2. semestru plyne následující.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

Příklad 3 (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (4 - 8) - (8 - 16) + 0 = -8 + 8 = 0$$

Alternativně: opět pomocí Věty 5.8 z 2. semestru.

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{5.10 \text{ z 2. semestru}}{=} 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

Příklad 3 (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 2 \cdot (9 - 28) + 0 = -4 - 2 \cdot (-19) = -4 + 38 = 34$$

Alternativně:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{5.8 \text{ z 2. semestru}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -6 & -13 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -13 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 4 \cdot 13 = 52 - 18 = 34$$

Příklad 3 (e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{(**)}{=} 1 \cdot (-38) - 2 \cdot 53 - 2 \cdot 47 = -38 - 106 - 94 = -238$$

():**

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 0 = 4 \cdot (-9 - 2) - 2 \cdot (-3 - 0) = -44 + 6 = -38$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 0 = -1 \cdot (-9 - 2) - 2(-9 - 12) = 11 + 42 = 53$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 4 \cdot (3 - 18) + 2 \cdot (-6) = -1 + 60 - 12 = 47$$

Alternativně:

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} &\stackrel{5.8 \text{ z } 2. \text{ semestru}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -5 & -12 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -15 \end{vmatrix} = \\
 &\stackrel{5.8 \text{ z } 2. \text{ semestru}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -14 & -15 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -16 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -14 & -15 \\ -7 & -16 \end{vmatrix} = -2 \cdot (14 \cdot 16 - 15 \cdot 7) = \\
 &= -2 \cdot (224 - 105) = -2 \cdot 119 = -238
 \end{aligned}$$